

Анализ распознавания одномерных сигналов в шуме

Петюшко Александр

petsan@newmail.ru

МГУ, механико-математический факультет, кафедра МаТИС

Краткий обзор работы

По известным распределениям амплитуды и фазы сигнала и шума выводится формула распределения амплитуды зашумленного сигнала с целью дальнейшего его распознавания. Приведенная формула пригодна для широкого класса непрерывных распределений.

По заданным распределениям амплитуды и фазы сигнала и шума выводится формула для вычисления вероятности правильного распознавания для метода сравнения зашумленного сигнала с чистым эталоном, и показано, как распространить эту формулу на некоторые другие методы распознавания. Также выводится общая формула для вычисления вероятности правильного распознавания методом сравнения с эталонами.

Анализируются два известных метода распознавания одномерных сигналов в шуме: метод спектрального вычитания и метод сравнения зашумленного сигнала с чистым эталоном. Показано, что, вообще говоря, более простой второй метод предпочтительнее, чем первый.

Вышеперечисленные методы распознавания используются не только в распознавании речи (что было взято за основу для работы), но и в ядерно-магнитном резонансе (ЯМР), химической акустике и других отраслях науки [8], где используется очистка одномерных сигналов от шума. Следовательно, результаты могут быть распространены без изменений на все эти области.

1. Введение

1. Необходимые сведения и основные определения

Любое колебание можно охарактеризовать частотой и фазой, точнее, спектром как зависимость амплитуды и фазы колебания от частоты (для данного момента времени). Особенностью спектрального подхода к рассмотрению колебаний является, например, то, что звуковой сигнал воспринимается ухом человека не в амплитудно-временной, а в частотной области (различные участки внутреннего уха отвечают за восприятие различных частот звука), при этом влияние фазы звуковых колебаний на процесс восприятия практически отсутствует.

Полезному сигналу обычно сопутствуют иные источники, которые можно в совокупности назвать источниками шума. Источниками шума могут быть лампа дневного освещения, говорящий в коридоре человек, инструментальные помехи в канале связи и т.п.

Шум накладывается на полезный сигнал по аддитивному закону (в амплитудно-временной области).

Одномерный сигнал $s(t): R_+ \rightarrow R$ можно рассматривать как непрерывную функцию зависимости амплитуды (как величины со знаком) от времени. Однако при цифровой обработке сигнал подвергается дискретизации в соответствии с выбранной частотой, т.е. производится запись значений амплитуды через определенные промежутки времени.

Чтобы по дискретной последовательности значений амплитуды восстановить сигнал, используется так называемое **дискретное преобразование Фурье (ДПФ)**, которое

текущему окну длины N ставит в соответствие вектор коэффициентов разложения в ряд Фурье c_0, \dots, c_{N-1} , причем $c_j = \overline{c_{N-j}}$, $j = \overline{N/2+1, N-1}$, т.к. значения амплитуд действительны.

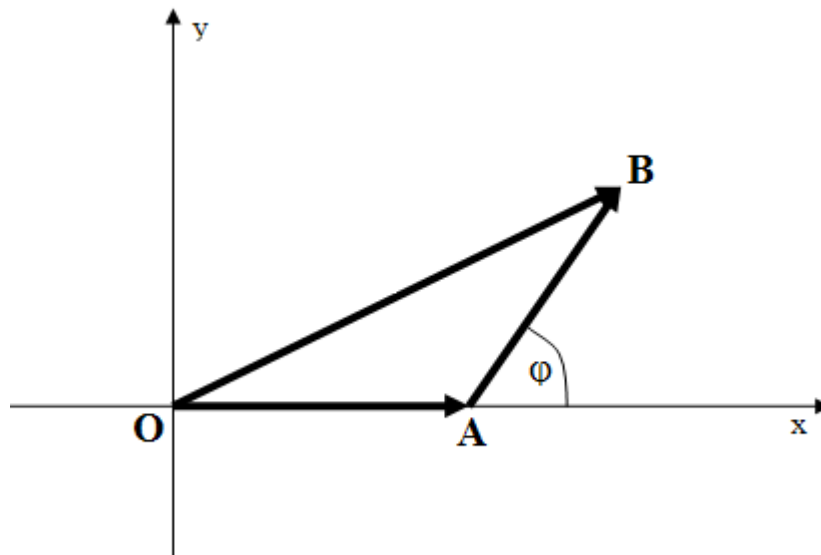
Назовем "вектором Фурье" элемент множества $R_+^{N/2+1}$, составленный из модулей первых $N/2+1$ коэффициентов в разложении в ряд Фурье.

Порядковый номер коэффициента в векторе Фурье определяет частоту сигнала.

2. Геометрическая модель зашумления

Фактически каждый элемент из полученного вышеописанным образом вектора Фурье представляет собой коэффициент (амплитуду) при синусоиде, соответствующей некоторой частоте. Таким образом, после ДПФ двух сигналов и взятия модуля от коэффициентов мы имеем амплитуды синусоид сигналов на соответствующих частотах, причем фазы у синусоид каждого преобразования, вообще говоря, свои.

Значит, чтобы сложить два сигнала, имея их вектора Фурье, нам фактически нужно сложить (по каждой частоте отдельно) две синусоиды с разными фазами и амплитудами, что геометрически эквивалентно сложению двух векторов с длинами, равными амплитудам синусоид, и углом между ними, равным разности фаз:



В данном случае на рисунке изображено сложение двух векторов \overline{OA} и \overline{AB} , соответствующих, например, амплитудам полезного сигнала и шума, с разностью фаз между соответствующими векторами φ . Таким образом, в данной модели зашумленный сигнал (например, зашумленная речь) мы принимаем \overline{OB} .

Назовем это "геометрической моделью зашумления".

3. Распознавание одномерных сигналов. Методы распознавания в условиях шума

Часто, прежде всего для практических нужд, встает задача **распознавания одномерных сигналов** [1] - т.е. определения, какому типу (классу) принадлежит исследуемый сигнал. Деление на классы может быть совершенно различным, будь то классы полезный сигнал/шум, голос определенного диктора или конкретный сигнал из какого-либо словаря.

Одним из основных методов распознавания является **метод сравнения с эталонами** (эталон - заранее записанный образец того или иного полезного сигнала). Он основан на том, что на основе выбранной метрики (расстояния) между одномерными сигналами

результатом распознавания сигнала считается значение того эталона, который *ближе* (расстояние от сигнала до которого *меньше*) к рассматриваемому сигналу.

Но в распознавании в шуме есть свои трудности. В подавляющем большинстве случаев значение разности фаз между сигналом и шумом на любой отдельно взятой частоте неизвестно, т.к. нет возможности одновременно извлекать параметры для шума и полезного сигнала отдельно. По аналогичным причинам неизвестно точное значение амплитуды и фазы шума на отдельной частоте, поэтому обычно сначала (например, на начальном отрезке времени зашумленного сигнала) производится настройка на шум и вычисляются какие-то его средние параметры.

Традиционно применяются следующие методы распознавания в шуме, основанные на методе сравнения с эталонами:

- 1) Использование эталонов, записанных в условиях отсутствия шума. Самый простой метод.

Преимущества: простой математически и вычислительно.

Недостатки: при увеличении уровня шума качество распознавания резко ухудшается.

- 2) **"Метод спектрального вычитания"** [2].

Сначала вычитаем из амплитуды на каждой частоте оценку амплитуды шума, затем сравниваем полученный сигнал с эталоном.

Преимущества: дает хорошие результаты при малом уровне шума.

Недостатки: при большом уровне шума возможна ситуация, когда в результате применения метода отношение "сигнал/шум" уменьшается.

- 3) **"Метод адаптивной фильтрации"** (обучения в шуме) [3],[4].

На каждом шаге производим настройку параметров адаптивного фильтра (например, с помощью метода наименьших квадратов), используя признак "сигнал-шум".

Преимущества: хорошо работает для широкого класса квазистационарных шумов.

Недостатки: плохой процент распознавания в случае сильно меняющихся или импульсных шумов; также зависит от правильности определения признака "сигнал-шум".

- 4) **"Метод маскирования шума"** [5].

На каждой отдельной частоте путем применения введенной выше "геометрической модели зашумления" зашумляем эталон с шумом со случайной фазой. Затем сравниваем распознаваемый сигнал с "зашумленным" эталоном.

2. Сравнение методов распознавания сигнала (сравнения с эталоном) в условиях шума

1. Цели работы

- Найти распределение зашумленного сигнала \overline{OB} .
- Получить общую формулу для вычисления вероятности правильного распознавания методом сравнения с эталонами.
- Получить аналитические формулы для попарного сравнения методов 1), 2) и 3).
- Более детально сравнить методы 1) и 2).

2. Сделанные допущения

- Без ограничения общности будем рассматривать сигнал на какой-нибудь фиксированной частоте. Все выкладки очевидным образом распространяются на все частоты.
- Полагаем, что разность фаз для пары сигнал-шум на этой частоте - это случайная величина φ , равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$.

- Для простоты положим, что амплитуды незашумленного сигнала и шума - две случайные равномерно распределенные величины на отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно: $s \in [a, b]$ - сигнал и $n \in [c, d]$ - шум, значения которых принадлежат R_+ (т.е. $a \geq 0$ и $c \geq 0$).
- В среднем сигнал "больше" шума - т.е. $\frac{a+b}{2} \geq \frac{c+d}{2}$.
- Случайные величины s, n, φ - независимы.
- Без ограничения общности в качестве эталонов будем рассматривать 2 неотрицательных числа $0 \leq e_1 < e_2$.
- В качестве метрики между двумя величинами x и $y \in R$ возьмем модуль разности между ними, т.е.

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

- Сигнала s равномерно распределен на отрезке $[e_1, e_2]$ (т.е. $a = e_1, b = e_2$).
- Также полагаем, что ни при каком значении разности фаз сигнал-шум первый эталон не станет дальше от нуля, чем второй (т.е. человек способен будет еще их различить). Это порождает условие на максимальную амплитуду шума, которая не может быть больше половины расстояния между эталонами, т.е.

$$n \leq \frac{L}{2}, \text{ где } L = e_2 - e_1.$$

- Для сравнения методов 1) и 2) предположим, что расстояние между эталонами меньше расстояния от первого эталона до нуля, т.е. $L < e_1$.

3. Постановка задач

В рамках вышеперечисленных допущений необходимо решить следующие задачи:

- Пусть $s \oplus n$ - зашумленный сигнал (см. "геометрическую модель зашумления" - там фигурировал вектор \overrightarrow{OB}). Требуется найти распределение $p(s \oplus n)$.
- Пусть α - знак неравенства ($<$ или $>$). Далее, пусть имеем изначально неравенство $\rho(s, e_1) \alpha \rho(s, e_2)$.

Требуется найти вероятность правильного распознавания, т.е. вероятность того, что после преобразования (которого, вообще говоря, может и не быть - например, метод 1) сигнала и эталонов $s \rightarrow s', e_1 \rightarrow e_1, e_2 \rightarrow e_2$ сигнал не станет ближе к другому, т.е.

$$P_0 = P(\rho(s, e_1) \alpha \rho(s, e_2) \bigcup \rho(s, e_1) \alpha \rho(s, e_2))$$

- Пусть P_0^i - вероятность правильного распознавания для метода с номером i . Получить аналитические формулы для P_0^1, P_0^2, P_0^3 (и, соответственно, их попарных разностей $P_0^1 - P_0^2, P_0^1 - P_0^3, P_0^2 - P_0^3$).
- Для некоторых значений s и n выяснить знак α в неравенстве $P_0^1 \alpha P_0^2$.

4. Вычисление плотности распределения $s \oplus n$

Теорема 1

Плотность распределения $s \oplus n$ вычисляется по формуле

$$p(s \oplus n) = \frac{1}{\pi(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d \frac{s \oplus n}{sn \sqrt{1 - \left(\frac{s^2 + n^2 - s \oplus n^2}{2sn}\right)^2}} dnd s.$$

► Верна следующая [6]

Теорема (о замене переменных под знаком тройного интеграла):

Пусть $\varphi, \psi, \chi: R^3 \rightarrow R$ - обратимые дифференцируемые отображения. Тогда верно следующее равенство:

$$\iiint_{\Omega} g(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} g(\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x}), \chi(\bar{x})) \times |D(\bar{x})| dx_1 dx_2 dx_3,$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1 = \varphi(\bar{x})$, $x_2 = \psi(\bar{x})$, $x_3 = \chi(\bar{x})$, а $D(\bar{x})$ - якобиан отображения $F = (\varphi, \psi, \chi): R^3 \rightarrow R^3$.

Пусть $f: R^3 \rightarrow R^3$ - обратимое дифференцируемое отображение:

$$\begin{aligned} a &= f(x, y, z)_1, b = f(x, y, z)_2, c = f(x, y, z)_3; \\ x &= f^{-1}(a, b, c)_1, y = f^{-1}(a, b, c)_2, z = f^{-1}(a, b, c)_3. \end{aligned}$$

Пусть (x, y, z) - независимые случайные величины, имеющие плотности p_x, p_y и p_z соответственно. Т.к. справедливо [7]

Утверждение Плотность совместного распределения независимых случайных величин - произведение их плотностей,

то совместная плотность распределения $p(a, b, c)$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} p(x, y, z) &= p_x(x) p_y(y) p_z(z) = \\ &= p_x(f^{-1}(a, b, c)_1) p_y(f^{-1}(a, b, c)_2) p_z(f^{-1}(a, b, c)_3) J_{f^{-1}} = p(a, b, c), \end{aligned}$$

где $J_{f^{-1}}$ - якобиан функции f^{-1}

У нас есть независимые равномерно распределенные случайные величины s, n, φ . Хотим узнать плотность распределения случайной величины $s \oplus n$, которая по формуле косинусов равна (см. рисунок к разделу "Геометрическая модель зашумления"):

$$s \oplus n = \sqrt{s^2 + n^2 - 2sn \cos(\varphi)}.$$

Т.к. $s \oplus n$ - непрерывно зависящая и монотонно возрастающая функция от φ на отрезке $[0, \pi]$, то максимум и минимум эта функция принимает на концах отрезка - т.е. в точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, и ее значения принадлежат отрезку $[s \oplus n(\varphi = 0), s \oplus n(\varphi = \pi)] = [|s - n|, s + n]$.

Следовательно, в нашем случае можно взять в качестве функции f следующее отображение:

$$f: s \rightarrow s, n \rightarrow n, \varphi \rightarrow s \oplus n = \sqrt{s^2 + n^2 - 2sn \cos(\varphi)}.$$

Таким образом, обратная функция f^{-1} :

$$f^{-1}: s \rightarrow s, n \rightarrow n, s \oplus n \rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{s^2 + n^2 - s \oplus n^2}{2sn}\right).$$

Т.к. нет никакой разницы в вышеупомянутом рисунке, какому отрезку принадлежит φ - $[0, \pi]$ или $[0, 2\pi]$ (правда, это справедливо в том случае, если φ равномерно распределена на соответствующем отрезке) - картинки симметричны относительно оси Ox , а арккосинус - обратимое дифференцируемое отображение при $\varphi \in [0, \pi]$, то естественно положить разность фаз равномерно распределенной на отрезке $[0, \pi]$.

Величина $J_{f^{-1}}$ определяется значением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (s \oplus n)} = \frac{s \oplus n}{sn \sqrt{1 - \left(\frac{s^2 + n^2 - s \oplus n^2}{2sn}\right)^2}},$$

т.к. сам якобиан имеет вид

$$J_{f^{-1}} = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial (s \oplus n)} \end{array} \right\|$$

Затем получившуюся трехмерную плотность $p(s, n, s \oplus n)$ интегрируем по первой (от a до b) и второй (от c до d) координатам. С учетом того, что $p_s = \frac{1}{b-a}$, $p_n = \frac{1}{d-c}$ и $p_\varphi = \frac{1}{\pi}$, в итоге получим плотность распределения случайной величины $s \oplus n$:

$$p(s \oplus n) = \frac{1}{\pi(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d \frac{s \oplus n}{sn \sqrt{1 - \left(\frac{s^2 + n^2 - s \oplus n^2}{2sn} \right)^2}} dnd s. \quad \blacksquare$$

5. Вычисление вероятности правильного распознавания методом сравнения с эталоном в условиях шума

Пусть имеется два эталона p и q , $p < q$, и сигнал r . Преобразованные (зашумленные/расшумленные/оставленные без изменений) эталоны и сигнал - p' , q' и r' соответственно.

Утверждение

Вероятность правильного распознавания вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}\left(r < \frac{p+q}{2}, r' < \frac{p'+q'}{2}\right) + \mathbf{P}\left(r \geq \frac{p+q}{2}, r' \geq \frac{p'+q'}{2}\right). \quad (0)$$

► Очевидно, что близость сигнала r к соответствующему эталону будет определяться его положением относительно середины отрезка $[p, q]$, т.е. если $r < \frac{p+q}{2}$, то $\rho(r, p) < \rho(r, q)$, в противном случае $\rho(r, p) \geq \rho(r, q)$. Совершенно аналогично: если $r' < \frac{p'+q'}{2}$, то $\rho(r', p') < \rho(r', q')$, иначе $\rho(r', p') \geq \rho(r', q')$.

Вероятность правильного распознавания - это вероятность того, что после преобразования сигнал не стал ближе к другому эталону. Т.к. сигнал может быть ближе только к одному из двух эталонов, то вероятность правильного распознавания в условиях шума складывается из двух вероятностей: вероятности того, что чистый сигнал и преобразованный сигналы были ближе к первому эталону (исходному и преобразованному соответственно) и вероятности того, что они были ближе ко второму эталону. Формальная запись:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}\left(r < \frac{p+q}{2}, r' < \frac{p'+q'}{2}\right) + \mathbf{P}\left(r \geq \frac{p+q}{2}, r' \geq \frac{p'+q'}{2}\right). \quad \blacksquare$$

6. Вывод аналитических формул для расчета вероятности правильного распознавания для методов 1), 2) и 3)

Рассчитаем величину \mathbf{P}_0^1 .

Имеем:

$$p = p' = e_1, q = q' = e_2, r = s, r' = s \oplus n.$$

Значит, по формуле (0) получим:

$$\mathbf{P}_0^1 = \mathbf{P}\left(s < \frac{e_1 + e_2}{2}, s \oplus n < \frac{e_1 + e_2}{2}\right) + \mathbf{P}\left(s \geq \frac{e_1 + e_2}{2}, s \oplus n \geq \frac{e_1 + e_2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi(b-a)(d-c)} \times \left(\int_{|s-n|}^{\frac{e_1+e_2}{2}} \int_a^{\frac{e_1+e_2}{2}} \int_c^d \frac{s \oplus n}{sn \sqrt{1 - \left(\frac{s^2+n^2-s \oplus n^2}{2sn} \right)^2}} dndsd(s \oplus n) + \right. \\ \left. + \int_{\frac{e_1+e_2}{2}}^{s+n} \int_{\frac{e_1+e_2}{2}}^b \int_c^d \frac{s \oplus n}{sn \sqrt{1 - \left(\frac{s^2+n^2-s \oplus n^2}{2sn} \right)^2}} dndsd(s \oplus n) \right). \quad (1)$$

Следовательно, верна

Лемма 1. Вероятность правильного распознавания методом 1) выражается формулой (1).

Вывод формул для случаев 2) и 3) совершенно аналогичен (меняются только пределы интегрирования и увеличивается количество слагаемых).

7. Сравнение методов 1) и 2)

Воспользуемся сделанными выше допущениями, что $a = e_1, b = e_2$ и $n \leq \frac{L}{2}$, где $L = e_2 - e_1$. Теперь обозначим за a - середину отрезка $[e_1, e_2]$, т.е. $a = \frac{e_1+e_2}{2}$. За x обозначим расстояние между сигналом s и серединой отрезка $[e_1, e_2]$, т.е. $x = |s - a|$.

Теорема 2. При $x \geq 2n$ оба метода не работают.

При $\frac{3}{4} \leq x < 2n$ лучше работает метод 1).

► Преобразуем выражение $P_0^1 - P_0^2 =$

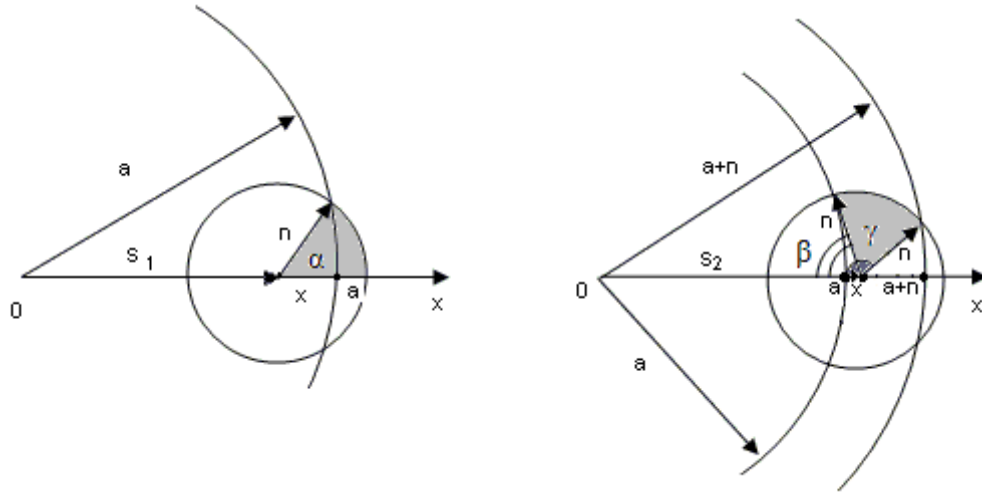
$$= P(s < a, s \oplus n < a) + P(s \geq a, s \oplus n \geq a) - P(s < a, s \oplus n < n+a) - P(s \geq a, s \oplus n \geq n+a) = \\ = P(s < a, s \oplus n < a) - P(s < a, s \oplus n < n+a) + P(s \geq a, s \oplus n \geq a) - P(s \geq a, s \oplus n \geq n+a) = \\ = P(s \geq a, s \oplus n \in [a, n+a]) - P(s < a, s \oplus n \in [a, n+a]). \quad (2)$$

Далее, рассматриваем, так же как и в Теореме 1, только углы $\varphi \in [0, \pi]$ - т.е. верхнюю полуплоскость.

Каким образом будем оценивать формулу (2). План доказательства теоремы следующий: берем всевозможные $x \in [0, L/2]$, для каждого конкретного x рассматриваем сигналы $s_1 = a - x$ и $s_2 = a + x$, берем конкретное значение $n \in [0, L/2]$, для них вычисляем величину $s \oplus n_1$ и $s \oplus n_2$, и смотрим, "больше" ли (под мерой понимаем лебегову меру отрезка) множество углов, задающих разность фаз, удовлетворяющих условию $s \oplus n_2 \in [\frac{e_1+e_2}{2}, n + \frac{e_1+e_2}{2}]$, множества углов, удовлетворяющих $s \oplus n_1 \in [\frac{e_1+e_2}{2}, n + \frac{e_1+e_2}{2}]$.

В том случае, когда "больше", считаем, что выполняется условие U . Если "меньше", то считаем, условие U не выполняется. Если мера множества допустимых x (и, соответственно, s) и n (в данном случае мера Лебега на плоскости), при которых условие U выполняется, больше меры множества, на которых условие U не выполняется (на самом деле, есть область допустимых x и n , в которой множество углов, удовлетворяющих соответствующим условиям, пусто), то условие теоремы выполнено.

Ясно, что $s \oplus n \in [a, a+n]$ в том и только том случае, если конец вектора $\vec{s} + \vec{n}$ лежит внутри кольца, образованного двумя окружностями с радиусами a и $a+n$. Обозначим за α угол, образованный вектором \vec{n} , который находится в крайнем допустимом положении для сигнала $a - x$, и положительным направлением оси, а за β, γ - углы, образованные вектором \vec{n} , который находится в крайнем допустимом положении для сигнала $a + x$, и отрицательным направлением оси Ox - см. рисунки:



Серым цветом закрашена область допустимых углов, которая определяется величинами α и $\gamma - \beta$ соответственно.

Ясно, что при $x \geq 2n$, множество допустимых углов в обоих случаях пусто, т.к.

$$s \oplus n_1 \leq s_1 + n \leq a - 2n + n = a - n \leq a,$$

$$s \oplus n_2 \geq s_2 - n \geq a + 2n - n = a + n.$$

В случае $n \leq x \leq 2n$ множество допустимых углов для $s \oplus n_2$ ненулевой меры, а для $s \oplus n_1$ - пусто, т.к.

$$s \oplus n_1 \leq s_1 + n \leq a - n + n = a.$$

Таким образом, для $n \leq x \leq 2n$ выполняется условие У. Рассмотрим случай $\frac{3n}{4} \leq x \leq n$.

При $x = kn, 0 < k < 1$ по теореме косинусов имеем

$$\cos \alpha = k - \frac{1-k^2}{2(z-k)}, \cos \beta = k + \frac{1-k^2}{2(z+k)}, \cos \gamma = k - 1 + \frac{2k-k^2}{2(z+k)},$$

$$\text{где } z = \frac{a}{n} = \frac{e_1 + e_2}{2n} \geq \frac{e_1 + e_2}{L} = \frac{e_1 + e_2}{e_2 - e_1} = 1 + \frac{2e_1}{e_2 - e_1} = 1 + \frac{2}{\frac{e_2}{e_1} - 1} \geq 1 + \frac{2}{2-1} = 3,$$

т.е. $z \geq 3$. Следовательно,

$$k - \frac{1-k^2}{2(3-k)} < \cos \alpha < k, k < \cos \beta < k + \frac{1-k^2}{2(3+k)}, k-1 < \cos \gamma < k-1 + \frac{2k-k^2}{2(3+k)}.$$

Исходя из этих оценок, получаем

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} < \sqrt{1 - k^2}, \sin \gamma \leq 1.$$

Множество допустимых углов для $s \oplus n_1$ определяется величиной α , а для $s \oplus n_2$ - величиной $\gamma - \beta$. Для того, чтобы выполнялось условие У, необходимо, чтобы $\alpha < \gamma - \beta$, т.е.

$$\cos \alpha > \cos(\gamma - \beta) = \cos \gamma \cos \beta + \sin \gamma \sin \beta. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда $k - 1 + \frac{2k-k^2}{2(3+k)} < 0$, т.е. $k < \sqrt{15} - 3$. В этом случае условие (3) будет следовать из неравенства

$$k(k-1 + \frac{2k-k^2}{2(3+k)}) + \sqrt{1-k^2} < k - \frac{1-k^2}{2(3-k)}. \quad (4)$$

Продифференцируем левую часть неравенства (4) по k . Получим

$$\frac{1}{2(3+k)^2 \sqrt{1-k^2}} (2k^3 (\sqrt{1-k^2} - 1) + 3k^2 (5\sqrt{1-k^2} - 4) + \sqrt{1-k^2} (36k - 18) - 18k)$$

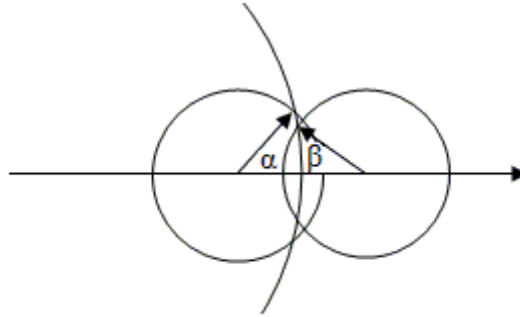
Ясно, что при $k \in [\frac{3}{4}, 1]$:

$$\begin{aligned}
2k^3(\sqrt{1-k^2}-1) &< 0, \\
3k^2(5\sqrt{1-k^2}-4) &< 3k^2(5\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}-4) = 3k^2 \frac{5\sqrt{7}-16}{4} < 0, \\
\sqrt{1-k^2}(2k-1)-k &< \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}(2k-1)-k = \frac{\sqrt{7}}{4}(2k-1)-k < \\
&< \frac{3}{4}(2k-1)-k = \frac{1}{2}k - \frac{3}{4} < \frac{1}{2} - \frac{3}{4} < 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, производная меньше нуля, и левая часть неравенства (4) убывает. Аналогично показывается, что правая часть возрастает. Т.к. при $k = \frac{3}{4}$ это неравенство верно, оно будет верно и при $\frac{3}{4} \leq k \leq \sqrt{15}-3 = k_1$.

Аналогичным образом можно было бы поступить и при $\sqrt{15}-3 \leq k \leq 1$ (правда, неравенство (4) примет немного иной вид из-за другой оценки произведения косинусов), но в таком случае вычисление производных и исследование функций очень сложно. Поступим иначе.

При $x = n(k=1)$ имеем $\alpha = \beta = 0, \gamma - \beta = \gamma = \gamma_0$. Далее, очевидно, что при уменьшении x γ и β увеличиваются; пусть $\gamma = \gamma_0 + \psi$. Следовательно, $\gamma - \beta = \gamma_0 + \psi - \beta$. Из геометрических соображений (см.рисунок) всегда $\alpha > \beta$, т.е. $-\beta > -\alpha$. Значит, $\gamma - \beta > \gamma_0 + \psi - \alpha$.



Таким образом, если мы докажем, что $\gamma_0 + \psi - \alpha > \alpha$, т.е. $\alpha < \frac{1}{2}(\gamma_0 + \psi)$, а это неравенство следует из $\alpha < \frac{1}{2}\gamma_0$, то получим, что $\gamma - \beta > \alpha$, т.е. условие U выполняется.

Рассмотрим, при каких k выполняется неравенство

$$\cos \alpha > \cos \frac{\gamma_0}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma_0}{2}} \quad (5)$$

Подставляя $k=1$ в вышеприведенные формулы для косинусов, получаем, что

$$\cos \gamma_0 = \frac{1}{2(z+1)} < \frac{1}{8}.$$

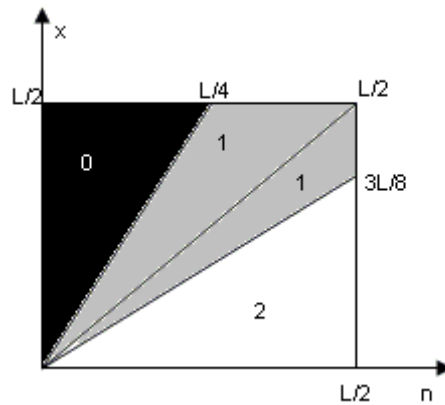
Опять же используя те же формулы, получаем, что для (5) нужно доказать неравенство $k - \frac{1-k^2}{2(3-k)} > \frac{3}{4}$, которое равносильно квадратичному неравенству

$$2k^2 - 15k + 11 < 0$$

т.е. $k > \frac{15-\sqrt{137}}{4} = k_2$. Т.к. $k_2 < k_1$, то мы доказали, что при $\frac{3}{4} \leq k \leq 1$ условие U выполняется, а вместе с тем и условие теоремы. ■

Замечание. Мера на множестве допустимых значений (s, n) , где метод 1) работает лучше, больше соответствующей меры для метода 2).





Мера на квадрате $(s, n), 0 \leq s \leq L/2, 0 \leq n \leq L/2$ (см. рисунок: 0 - где мера допустимых параметров равна нулю, т.е. оба метода не работают, 1 - где выполняется условие U , т.е. метод 1) работает лучше, и 2 - где лучше работает второй метод) где условие U выполняется, есть

$$\mu_1 > \frac{1}{2} \frac{L}{4} \frac{L}{2} + \frac{1}{2} \frac{L}{8} \frac{L}{2} = \frac{1}{4} \frac{3L^2}{8}.$$

Условие U не выполняется на мере

$$\mu_2 < \frac{1}{2} \frac{3L}{8} \frac{L}{2} = \frac{1}{4} \frac{3L^2}{8}.$$

Значит, $\mu_1 > \mu_2$. ■

3. Литература

1. Ю.И. Журавлев, "Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации". "Проблемы кибернетики", вып. 33, Москва, "Наука", 1978.
2. S.F. Boll, "Suppression of acoustic noise in speech using spectral subtraction". IEEE, Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP - 27, no. 2, pp. 113-120, 1979.
3. B. Widrow et al., "Adaptive noise cancelling: Principles and applications". Proceedings of the IEEE, 63(12), pp. 1692-1716, 1975.
4. L. Bamber, D. Kerns, S. Haykin, "Adaptive Filter Theory" (International edition). Prentice Hall, 2004.
5. D.H. Klatt, "A digital filter bank for spectral matching". Proc. ICASSP, 76, pp.573-576, 1976.
6. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков, "Лекции по математическому анализу". Москва, "Высшая школа", 1999.
7. В.П. Чистяков, "Курс теории вероятностей". Москва, "Наука", 1982.
8. A.E. Derome, "Modern NMR techniques for chem. research", Pergamon Press, November 1993.