

Секция «Математика и механика»

О применении марковских случайных полей в шумоочистке

**Петюшко Александр Александрович**

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: petsan@newmail.ru

Пусть  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  - множество индексов,  $X = (X_1, \dots, X_N)$  - многомерная случайная величина (для простоты полагается, что  $\forall j X_j$  дискретны и множество их значений  $x_j$  - конечно (например, из конечного множества  $A$ )). Введенная т.о. случайная величина  $X$  называется *случайным полем* (СП) на  $S$ . Совместное событие  $(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N)$ , кратко  $X = x$ , - *конфигурация*  $X$ . Множество всех возможных конфигураций -  $\chi = \{x = (x_1, \dots, x_N) \mid x_i \in A \forall i \in S\}$ .

Определение *марковского случайного поля* (МСП) дается через *систему соседства* [2]. Для дальнейших результатов важно понятие *клик* как полного графа с вершинами из  $S$ , любые две вершины которого являются соседями (любое одноэлементное подмножество  $S$  также считается кликой).

Пусть  $x_c$  - набор значений  $X_i$ , где  $i \in c$  ( $c$  - клика). *Потенциальная функция*  $V_c(x_c)$  - любая действительная функция от  $x_c$ . *Потенциал*  $U(x)$  - это  $\sum_{c \in C} V_c(x_c)$ , где суммирование ведется по множеству всех клик  $C$  на  $S$ . Фундаментальный результат в теории МСП дает следующая

**Теорема (Hammersley-Clifford).**  $X$  - МСП  $\Leftrightarrow \mathbf{P}(X = x)$  - распределение Гиббса, т.е. имеет вид  $\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{Z} \exp(-U(x))$ , где  $Z = \sum_{x \in \chi} \exp(-U(x))$ .

**Теорема.** Пусть в введенных обозначениях  $N$  - СП, заданное на множестве индексов  $S$ ,  $n$  - его конфигурация, т.ч.  $n_i \in N(\mu, \sigma^2)$  - независимые компоненты Гауссова шума. Пусть  $D = (d_1, \dots, d_N)$ ,  $d_i = x_i + n_i$ ,  $i \in S$  - СП на  $S$ . Тогда  $\mathbf{P}(X = x \mid D = d) = \frac{1}{Z_1} \exp\left(-U(x) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in S} (\mu - (d_i - x_i))^2\right)$ .

Т.о., вид распределения условного МСП, зашумленного Гауссовым шумом, такой же, как и у исходного МСП ( $\frac{1}{2\sigma^2}(\mu - (d_i - x_i))^2$  можно понимать как потенциал на одноэлементной клике  $\{i\}$ ). Значит, оправдано использование датчика Гиббса [1] для выдачи реализации МСП, учитывая следующее: 0) картинка считается монохромной; 1) параметры зашумления  $(\mu, \sigma)$  заранее известны; 2) в качестве всех потенциальных функций на кликах берется хог; 3) в качестве начального приближения берется зашумленная картинка.

Проведенные эксперименты показали, что, в случае текстурного анализа, для удаления 90% шума достаточно 30-50 итераций датчика Гиббса.

**Литература**

1. Geman S., Geman D. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 6 (6), 1984, pp. 721-741.
2. Li S.Z. Markov Random Field Modeling In Image Analysis. Springer, 2009.